

kretanje mase m_2 , dok će masa m_1 ostati u miru. Amplituda prinudnih oscilacija ove druge mase m_2 u ovom slučaju biće određena izrazom

$$C_2^a = -\frac{h}{b} = -\frac{F_0}{C_2}$$

t.j. i ona će imati relativno malu veličinu.

§ 16. Prinudne prigušene oscilacije

Dinamički apsorber sa prigušivanjem. Rezonantni dijagrami.

Razmotrimo najzad i najkomplikovaniji mogući slučaj malih oscilacija sistema materijalnih tačaka M_1 , M_2 , ..., M_i , ..., M_n , sa dva stepena slobode.

Neka na svaku od tačaka M_i materijalnog sistema deluje elastična sila $\bar{F}_{ei}$, zatim sila otpora proporcionalna prvom stepenu brzine $\bar{F}_{wi}$, i najzad poremećajna sila $\bar{F}_{\Omega i}$, koja se tokom vremena menja periodično po zakonu

$$F_{\Omega i} = F_{\Omega i} \cos \Omega t.$$

Lagranževe jednačine druge vrste za slučaj malih oscilacija sistema, u ovom slučaju imaju oblik:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial E_p}{\partial q_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1} = Q_1^a,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial E_p}{\partial q_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_2} = Q_2^a.$$

(16.1)

Kinetička i potencijalna energija sistema, kao i funkcija rasipanja, određene su izrazima (14.1), dok će generalisane poremećajne sile sistema biti određene izrazima (15.2).

Kada se svi pobrojani izrazi smene u Lagranževe jednačine druge vrste (16.1), dobija se:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + b_{11} \dot{q}_1 + b_{12} \dot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= Q_1 \cos \Omega t, \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + b_{21} \dot{q}_1 + b_{22} \dot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= Q_2 \cos \Omega t. \end{aligned}$$

(16.2)

Ovo su diferencijalne jednačine prinudnih prigušenih oscilacija materijalnog sistema sa dva stepena slobode, pod dejstvom sila otpora koje su proporcionalne prvim stepenima brzina tačaka sistema.

Kao što se vidi iz (16.2) ovaj problem sveo se na sistem nehomogenih linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Opšti integrali diferencijalnih jednačina (16.2) biće jednaki zbiru opštih integrala homogenih jednačina, i partikularnih integrala nehomogenih jednačina, tj.

$$q_1 = (q_1)_h + (q_1)_p,$$

$$q_2 = (q_2)_h + (q_2)_p.$$

(16.3)

U § 14 proučili smo detaljno odredjivanje opštih integrala homogenih jednačina (16.2), odnosno slobodne prigušene oscilacije ovog sistema. U slučaju prividnog periodičnog kretanja sistema, tj. u slučaju malog prigušenja u sistemu, a to je jedini slučaj koji je od interesa sa gledišta teorije oscilacija, slobodne prigušene oscilacije sistema se vrlo brzo amortizuju tokom vremena i praktično vrlo brzo nestaju, tako da onda nastaje tzv. režim prinudnog kretanja. Iz tog razloga pri proučavanju prinudnih prigušenih oscilacija materijalnog sistema sa dva stepena slobode ograničićemo se samo na proučavanje prinudnih oscilacija ovog sistema, tj. samo na odredjivanje partikularnih integrala nehomogenih jednačina (16.2).

Partikularni integrali nehomogenih jednačina (16.2) potražićemo u obliku:

$$\begin{aligned}(q_1)_p &= C_1 \cos(\Omega t - \varphi_1), \\ (q_2)_p &= C_2 \cos(\Omega t - \varphi_2),\end{aligned}\tag{16.4}$$

što se može napisati i u obliku:

$$\begin{aligned}(q_1)_p &= A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t, \\ (q_2)_p &= A_2 \cos \Omega t + B_2 \sin \Omega t,\end{aligned}\tag{16.5}$$

gde je:

$$\begin{aligned}A_1 &= C_1 \cos \varphi_1, \quad B_1 = C_1 \sin \varphi_1, \\ A_2 &= C_2 \cos \varphi_2, \quad B_2 = C_2 \sin \varphi_2.\end{aligned}\tag{16.6}$$

Iz (16.6) proizlazi da je:

$$\begin{aligned}C_1 &= \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad \tan \varphi_1 = \frac{B_1}{A_1}, \\ C_2 &= \sqrt{A_2^2 + B_2^2}, \quad \tan \varphi_2 = \frac{B_2}{A_2}.\end{aligned}\tag{16.7}$$

Da bismo odredili veličine A_1 , A_2 , B_1 i B_2 , smenimo izraze (16.5) u diferencijalne jednačine (16.2). Tom prilikom ćemo za određivanje ovih veličina dobiti sistem od četiri nehomogene algebarske jednačine oblika:

$$A_1(C_{11} - \alpha_{11}\Omega^2) - B_1 b_{11}\Omega + A_2(C_{12} - \alpha_{12}\Omega^2) - B_2 b_{12}\Omega = Q_1,$$

$$A_1 b_{11}\Omega + B_1(C_{11} - \alpha_{11}\Omega^2) + A_2 b_{12}\Omega + B_2(C_{12} - \alpha_{12}\Omega^2) = 0,$$

$$A_1(C_{12} - \alpha_{12}\Omega^2) - B_1 b_{12}\Omega + A_2(C_{22} - \alpha_{22}\Omega^2) - B_2 b_{22}\Omega = Q_2,$$

$$A_1 b_{12}\Omega + B_1(C_{12} - \alpha_{12}\Omega^2) + A_2 b_{22}\Omega + B_2(C_{22} - \alpha_{22}\Omega^2) = 0.$$

(16.8)

Iz ovih jednačina mogu da se odrede veličine A_1 , B_1 , A_2 i B_2 , a preko njih i amplitude prinudnih oscilacija sistema C_1 i C_2 , kao i uglovi faznih razlika φ_1 i φ_2 , koji su određeni izrazima (16.7).

Na ovaj način partikularni integrali nehomogenih jednačina (16.2), koji su određeni izrazima (16.4), ili (16.5), biće potpuno određeni, pa će time biti potpuno određene i prinudne oscilacije razmatranog sistema, čime je razmatrani problem u potpunosti rešen.

Eliminanta sistema jednačina (16.8) ima oblik:

$$\Delta(\Omega^2) = \begin{vmatrix} (C_{11} - \alpha_{11}\Omega^2) & -b_{11}\Omega & (C_{12} - \alpha_{12}\Omega^2) & -b_{12}\Omega \\ b_{11}\Omega & (C_{11} - \alpha_{11}\Omega^2) & b_{12}\Omega & (C_{12} - \alpha_{12}\Omega^2) \\ (C_{12} - \alpha_{12}\Omega^2) & -b_{12}\Omega & (C_{22} - \alpha_{22}\Omega^2) & -b_{22}\Omega \\ b_{12}\Omega & (C_{12} - \alpha_{12}\Omega^2) & b_{22}\Omega & (C_{22} - \alpha_{22}\Omega^2) \end{vmatrix},$$

(16.9)

pri čemu su svi članovi koji figurišu u prethodnoj determinanti konstantni.

Ako odgovarajuće minore determinante (16.9) označimo sa A_{jk} , pri čemu se indeks j odnosi na vrste, a indeks k na kolone determinante (16.9), dobićemo sledeće formule za određi-

vanje A_1 , B_1 , A_2 i B_2 :

$$A_1 = \frac{1}{\Delta(\Omega^2)} [Q_1 A_{11}(\Omega^2) + Q_2 A_{31}(\Omega^2)] ,$$

$$B_1 = \frac{1}{\Delta(\Omega^2)} [Q_1 A_{12}(\Omega^2) + Q_2 A_{32}(\Omega^2)] ,$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta(\Omega^2)} [Q_1 A_{13}(\Omega^2) + Q_2 A_{33}(\Omega^2)] ,$$

$$B_2 = \frac{1}{\Delta(\Omega^2)} [Q_1 A_{14}(\Omega^2) + Q_2 A_{34}(\Omega^2)] .$$

(16.10)

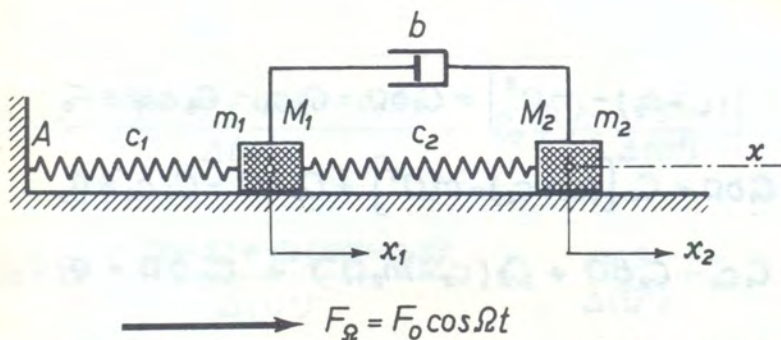
Može se pokazati da ni pri kakvim vrednostima za Ω determinanta $\Delta(\Omega^2)$ ne može biti jednaka nuli. Isto tako može se pokazati da ova determinanta ima uvek pozitivnu vrednost.

Dinamički apsorber sa prigušivanjem. Rezonantni dijagrami. Da bismo pokazali kako se i u slučaju prinudnih prigušenih oscilacija materijalnog sistema sa dva stepena slobode mogu konstruisati rezonantni dijagrami, i kako bismo utvrdili od kojih sve činitelaca zavisi konstrukcija tzv. dinamičkih apsorbera sa prigušivanjem, razmotrićemo opet primer proučen u prethodnom paragrafu.

Ovom prilikom ćemo mehanički model prikazan na sl. 50 usložiti tako, što ćemo pretpostaviti da između tela M_1 i M_2 , odnosno između masa m_1 i m_2 , postoji u sistemu i prigušivač, okarakterisan koeficijentom prigušenja sistema b , usled koga će se pri kretanju sistema pojaviti sila otpora $\bar{F}_w$ proporcionalna relativnoj brzini $(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$ između ovih masa, tj.

$$F_w = b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) .$$

Mehanički model čije ćemo kretanje sada proučiti prikazan je na sl. 52.



Sl. 52

Diferencijalne jednačine razmatranog sistema imaju oblik:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) - b (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = F_0 \cos \Omega t,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) + b (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0.$$

(a)

Brojna veličina koeficijenta prigušenja sistema b predstavlja silu otpora kada relativna brzina između masa m_1 i m_2 bude jednaka jedinici.

Imajući u vidu sve ono što je rečeno u prethodnim izlaganjima, za rešenje postavljenog problema biće dovoljno da proučimo samo prinudne oscilacije sistema.

Partikularni integrali nehomogenih jednačina (a) potražićemo u obliku:

$$(x_1)_p = C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t,$$

$$(x_2)_p = C_3 \cos \Omega t + C_4 \sin \Omega t.$$

(b)

Tom prilikom dobićemo sistem nehomogenih algebarskih jednačina oblika:

$$\begin{cases}
 C_1 [(C_1 + C_2) - m_1 \Omega^2] + C_2 b \Omega - C_3 C_2 - C_4 b \Omega = F_0, \\
 -C_1 b \Omega + C_2 [(C_1 + C_2) - m_1 \Omega^2] + C_3 b \Omega - C_4 C_2 = 0, \\
 -C_1 C_2 - C_2 b \Omega + C_3 (C_2 - m_2 \Omega^2) + C_4 b \Omega = 0, \\
 C_1 b \Omega - C_2 C_2 - C_3 b \Omega + C_4 (C_2 - m_2 \Omega^2) = 0.
 \end{cases}$$

(c)

Ako uvedemo oznake:

$$p = C_1 - m_1 \Omega^2, \quad q = C_2 - m_2 \Omega^2,$$

$$r = b \Omega, \quad s = m_2 \Omega^2,$$

(d)

onda se, posle jednostavnih transformacija, eliminanta sistema jednačina (c) može napisati u obliku:

$$\Delta(\Omega^2) = \begin{vmatrix} p & 0 & -s & 0 \\ 0 & p & 0 & -s \\ -C_2 & -r & q & r \\ r & -C_2 & -r & q \end{vmatrix},$$

(e)

Kada se razvije determinanta (e) dobija se:

$$\Delta(\Omega^2) = (pq - C_2 s)^2 + r^2(p - s)^2.$$

(f)

Sve veličine (d) su konstantne.

Kada se reši sistem jednačina (c) dobićemo da su integracione konstante: C_1 , C_2 , C_3 i C_4 određene izrazima:

$$C_1 = F_0 \frac{r^2(p-s) + q(pq - C_2 s)}{\Delta(\Omega^2)}, \quad C_2 = F_0 \frac{rs^2}{\Delta(\Omega^2)},$$

$$C_3 = F_0 \frac{r^2(p-s) + C_2(pq - C_2 s)}{\Delta(\Omega^2)}, \quad C_4 = \frac{prs}{\Delta(\Omega^2)} \cdot F_0$$

(g)

Da bismo izveli izraz za dinamički faktor pojačavanja prinudnih oscilacija η osnovne (glavne) mase sistema m_1 , a samo ćemo njega i izvesti, potrebno je, s jedne strane, da odredimo maksimalnu amplitudu prinudnih oscilacija ove mase $(x_1)_{max}$, a osim toga, da bi se uprostila dalja izlaganja, potrebno je da se svi izrazi napišu u bezdimenzijskom obliku, što zahteva da se u račun uvedu mnoge nove veličine.

Maksimalna amplituda prinudnih oscilacija osnovne mase m_1 , pri dinamičkom dejstvu poremećajne sile $F_0^d = F_0 \cos \Omega t$, određena je izrazom:

$$(x_1)_{max}^d = f_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},$$

(h)

pa se, imajući u vidu izraze (g) za C_1 i C_2 , može lako izračunati.

Amplituda prinudnih oscilacija osnovne mase m_1 , pri statičkom dejstvu poremećajne sile, tj. kada ona deluje tako da je za sve vreme kretanja konstantna, biće u isto vreme jednaka statičkom izduženju opruge krutosti C_1 , pod dejstvom sile $F_0^{st} = F_0 = \text{const.}$, tj.

$$(x_1)^{st} = f_{st} = \frac{F_0}{C_1}.$$

(i)

Masa m_2 u razmatranom problemu predstavlja apsorber. Kružna frekvencija slobodnih oscilacija apsorbera, tj. mase m_2 , kada bi ona sama sačinjavala sistem, određena je izrazom:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{G_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{C_2 g}{G_2}}. \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{C_2}{m_2}} \quad (j)$$

Obeležimo koeficijent poremećaja, tj. odnos kružne frekvencije Ω poremećajne sile, odnosno prinudnih oscilacija, i kružne frekvencije ω_0 slobodnih oscilacija mase m_1 , odnosno glavnog dela sistema, kada bi samo masa m_1 sačinjavala sistem, sa

$$\Lambda = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad (k)$$

pri čemu je

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{C_1 g}{G_1}}. \quad (l)$$

Isto tako odnos kružnih frekvencija slobodnih oscilacija apsorbera (mase m_2) i glavnog dela sistema (mase m_1), obeležimo sa

$$\gamma = \frac{\omega_1}{\omega_0}. \quad (m)$$

Najzad, odnos masa m_2 i m_1 obeležimo sa

$$\zeta = \frac{m_2}{m_1} = \frac{G_2}{G_1}, \quad (n)$$

a bezdimenzijski koeficijent otpora sistema sa:

$$\sigma = \frac{b}{2m_2\omega_0} = \frac{bg}{2G_2\omega_0}.$$

(o)

Imajući u vidu, s jedne strane, sve uvedene oznake, i, s druge strane, sve do sada izvedene izraze, može se lako dobiti i sledeći izraz za dinamički faktor pojačavanja γ , mase m :

$$\gamma^2 = \left(\frac{f_i}{f_{st}} \right)^2 = \frac{[(x_i)_{max}^d]^2}{[(x_i)_{st}]^2} =$$

$$= \frac{4\sigma^2\lambda^2 + (\lambda^2 - \nu^2)^2}{4\sigma^2\lambda^2(\lambda^2 - 1 + \mu\lambda^2)^2 + [\mu\nu^2\lambda^2 - (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - \nu^2)]^2}.$$

(p)

Prema tome, kao što se vidi, biće:

$$\gamma = f(\lambda, \mu, \nu, \sigma).$$

Ako obeležimo sa

$$M = 4\lambda^2,$$

$$N = (\lambda^2 - \nu^2)^2,$$

$$P = 4\lambda^2(\lambda^2 - 1 - \mu^2\lambda^2)^2, \quad Q = [\mu\nu^2\lambda^2 - (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - \nu^2)]^2,$$

(q)

izraz (p) za dinamički faktor pojačavanja γ može se napisati i u kraćem obliku:

$$\gamma^2 = \frac{M\sigma^2 + N}{P\sigma^2 + Q}.$$

(r)

Preko izraza (p) može da se izračuna veličina dinamičkog faktora pojačavanja η u svakom konkretnom slučaju, pa samim tim i amplituda prinudnih oscilacija osnovne mase sistema m_1 , pri dinamičkom dejstvu poremećajne sile $F_q^d = F_0 \cos \Omega t$, ako u svakom konkretnom slučaju budu bile date vrednosti za: Λ , μ , ν i σ .

Izvršimo analizu izraza (p) za dinamički faktor pojačavanja η .

Tom prilikom razlikovaćemo tri slučaja, i to:

a) Prvi karakterističan (ekstremni) slučaj nastaje onda ako je $\sigma = 0$. Tada je i $\delta = 0$, tj. u tom slučaju ne postoji prigušenje u sistemu, pa za taj slučaj izraz (p) prelazi u

$$\eta = \left(\frac{f_1}{f_{sr}} \right) = \frac{\Lambda^2 - \nu^2}{\mu \Lambda^2 \nu^2 - (\Lambda^2 - 1)(\Lambda^2 - \nu^2)}.$$

(s)

Izraz (s) određuje dinamički faktor pojačavanja prinudnih oscilacija osnovne mase sistema m_1 , kada u sistemu ne postoji prigušivanje, odnosno kada masa m_1 predstavlja dinamički apsorber bez prigušivanja.

b) Drugi karakterističan (ekstremni) slučaj nastaje onda ako je $\sigma = \infty$. U tom slučaju izraz (p) postaje neodređen, tj. javlja se u obliku $0/0$, pa se diferenciranjem, odnosno korišćenjem Lopitalovog pravila, dobija da je dinamički faktor pojačavanja za ovaj slučaj određen izrazom:

$$(\eta)^2 = \left(\frac{f_1}{f_{sr}} \right)^2 = \frac{1}{(\Lambda^2 - 1 + \mu \Lambda^2)^2}.$$

(t)

Ako je prigušivanje u sistemu beskonačno veliko, onda neće postojati relativnog kretanja između masa m_1 i m_2 . Tada razmatrani sistem prelazi u sistem sa jednim stepenom slobode mase

$m_1 + m_2$, i sa krutošću opruge C_1 .

Kritičnu kružnu frekvenciju u ovom slučaju dobićemo kada izjednačimo sa nulom imenitelj u izrazu (t). Tako dobijamo

$$\Lambda^2 - 1 + \mu \Lambda^2 = 0,$$

odakle je:

$$\Lambda_{cr} = \sqrt{\frac{1}{1+\mu}}.$$

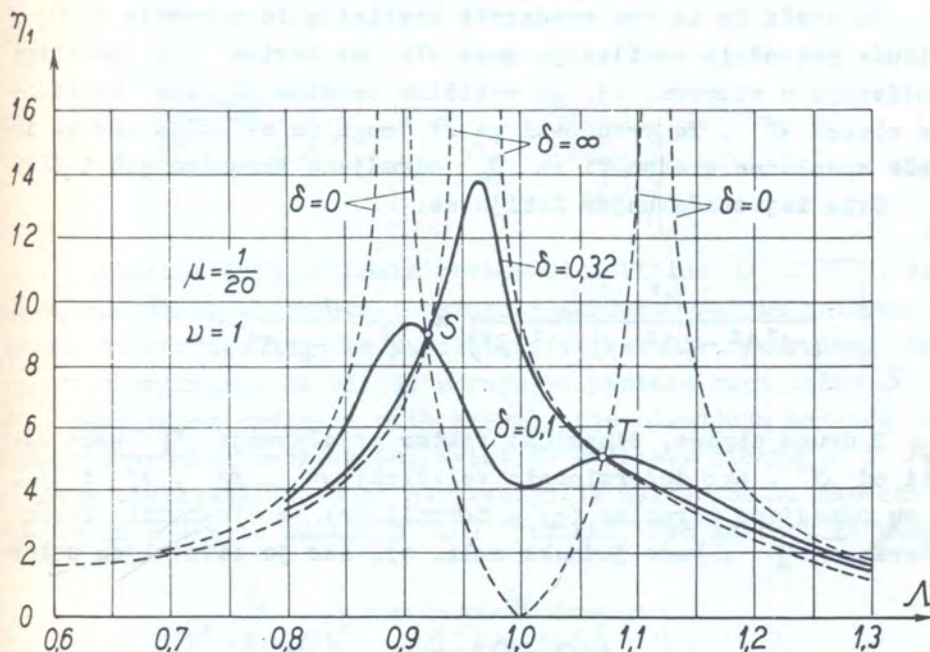
(u)

c) Ako bezdimenzijski koeficijent otpora σ ima vrednost između ekstremnih vrednosti navedenih u slučajevima pod a) i b), onda će dinamički faktor pojačavanja η zavisiti od promene ovog koeficijenta.

Da bismo konstruisali rezonantni dijagram za neki konkretni slučaj pretpostavimo da je

$$\mu = \frac{1}{20}, \quad \nu = 1.$$

Rezonantni dijagram za ovaj slučaj prikazan je na sl. 53.



Sl.53

Na ovom dijagramu isprekidanim linijama prikazane su rezonantne krive kada je $\sigma = 0$. Primetimo da su na ovom dijagramu ucrtane apsolutne vrednosti izraza (s), jer ovaj izraz menja znak kada je: $\Lambda = 0,895$, zatim kada je $\Lambda = 1$, i najzad kada je $\Lambda = 1,12$.

U drugom karakterističnom slučaju kada je $\sigma = \infty$, tj. kada je prigušivanje u sistemu beskonačno veliko, neće postojati relativno kretanje između masa m_1 i m_2 . Tada, kao što smo to već jednom napomenuli, sistem koji je imao dva stepena slobode, preći će u sistem sa jednim stepenom slobode.

Na sl. 53 isprekidanim linijama izvučene su takodje rezonantne krive i za slučaj $\sigma = \infty$. Ove krive su slične onima na sl. 21, koje smo ranije dobili prilikom proučavanja malih pravolinijskih prinudnih oscilacija materijalne tačke sa jednim stepenom slobode.

Na sl. 53 prikazane su takodje i krive za $\sigma = 0,10$ i za $\sigma = 0,32$.

Važno je primetiti da se sve ove krive seku u tačkama S i T .

To znači da za dve vrednosti koeficijenta poremećaja Λ , amplitude prinudnih oscilacija mase m_1 ne zavise od veličine prigušivanja u sistemu, tj. od veličine bezdimenzijskog koeficijenta otpora σ . Te vrednosti za Λ mogu da se nadju ako se izjednače apsolutne vrednosti za η , određene izrazima (s) i (t).

Ovim izjednačavanjem dobija se:

$$\frac{\Lambda^2 - \nu^2}{4\nu^2\Lambda^2 - (\Lambda^2 - 1)(\Lambda^2 - \nu^2)} = \frac{1}{\Lambda^2 - 1 + 4\Lambda^2} \quad (v)$$

S druge strane, dinamički faktor pojačavanja η , neće zavisiti od σ , ako determinanta veličina: M , N , P i Q , koje su određene izrazima (q) u formuli (r) za dinamički faktor pojačavanja η , bude jednaka nuli, tj. ako je zadovoljen uslov:

$$MQ - PN = 0.$$

(w)

Korišćenjem uslova (w) dobija se drugim putem ponovo jednačina (v).

Jednačina (v) može da se napiše i u obliku:

$$\Lambda^4 - 2 \frac{1 + (1 + \mu)\nu^2}{2 + \mu} \Lambda^2 + \frac{2\nu^2}{2 + \mu} = 0.$$

(x)

Iz jednačine (x) mogu da se odrede dva korena Λ_1^2 i Λ_2^2 , koji određuju apscise tačaka S i T . Odgovarajuće vrednosti za amplitude prinudnih oscilacija dobiće se ako smenimo tako nadjene vrednosti za Λ_1^2 i Λ_2^2 , ili u jednačinu (s), ili pak u jednačinu (t). Koristeći ovu drugu jednačinu kao prostiju, pretpostavljajući da je Λ_1^2 niži koren jednačine (x), moramo ispred kvadratnog korena u jednačini (t) uzeti znak minus, da bismo dobili pozitivnu vrednost za amplitudu.

Na taj se način za ordinate tačaka S i T dobijaju izrazi:

$$-\frac{f_{st}}{\Lambda_1^2 - 1 + \mu \Lambda_1^2} \quad i \quad \frac{f_{st}}{\Lambda_2^2 - 1 + \mu \Lambda_2^2}.$$

(y)

Veličine ovih ordinata zavise od veličina μ i ν , koje određuju težinu apsorbera i oprugu apsorbera. Tačnim izborom ovih karakteristika može se poboljšati efikasnost apsorbera. Kako sve krive prikazane na sl. 53 moraju da prolaze kroz tačke S i T , maksimalne ordinate ovih krivih, koje određuju najveće amplitude prinudnih oscilacija, zavisi od ordinata tačaka S i T , pa treba očekivati da će se najpovoljniji uslov dobiti ako ostvarimo da su ordinate tačaka S i T jednake. Ovo zahteva da bude

$$-\frac{f_{st}}{\Lambda_1^2 - 1 + \mu \Lambda_1^2} = \frac{f_{st}}{\Lambda_2^2 - 1 + \mu \Lambda_2^2},$$

$$\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 = \frac{2}{1+\mu}.$$

(z)

Kako su Λ_1^2 i Λ_2^2 koreni kvadratne jednačine (x), imajući u vidu Vietovo pravilo za kvadratne jednačine, prema kome je zbir korenova kvadratne jednačine jednak koeficijentu uz srednji član te jednačine sa suprotnim znakom, dobićemo da je:

$$\frac{2}{1+\mu} = 2 \frac{1+(1+\mu)\gamma^2}{2+\mu},$$

odakle je:

$$\gamma = \frac{1}{1+\mu}.$$

(a')

Ova prosta formula daje mogućnost da se apsorber reguliše po želji, odnosno po potrebi. Kada se izabere masa apsorbera m_2 , onda će biti poznat i odnos μ , pa se iz prethodne jednačine može odrediti i odgovarajuća vrednost za γ , preko koje može da se odredi kako kružna frekvencija slobodnih oscilacija apsorbera, tako i krutost opruge apsorbera.

Da bismo odredili amplitudu prinudnih oscilacija koja odgovara tačkama S i T , jedan od korenova jednačine (x) smenićemo u izraze (y). Za tačno regulisan apsorber važi odnos (a'), pa ova jednačina tada postaje:

$$\Lambda^4 - \frac{1}{1+\mu} \Lambda^2 + \frac{2}{(2+\mu)(1+\mu)^2} = 0,$$

(b')

odakle je:

$$\Lambda^2 = \frac{1}{1+\mu} \left(1 \mp \sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}} \right).$$

(c')

Tada se iz jednačine (y) dobija:

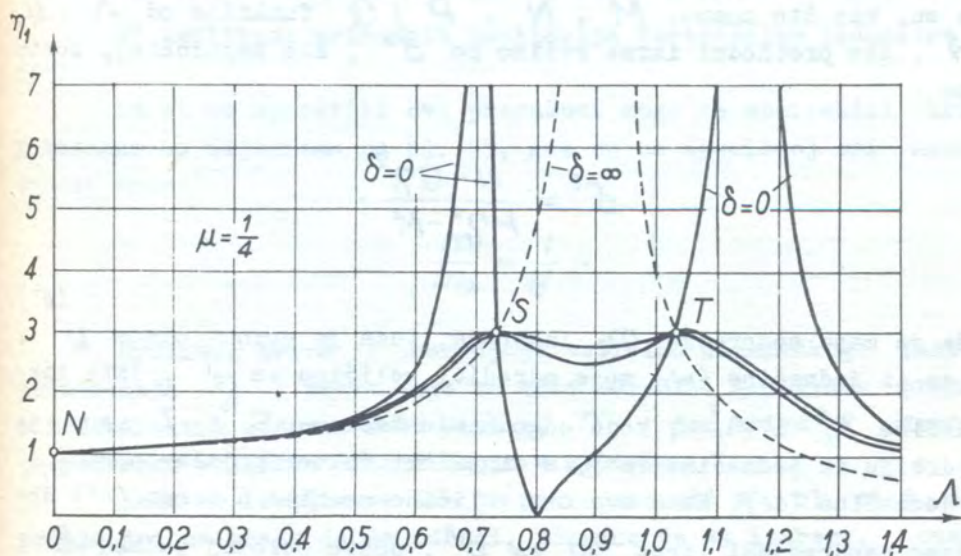
$$\eta_1 = \frac{f_1}{f_{st}} = \sqrt{\frac{2+\mu}{\mu}}.$$

(d')

Veličina σ , koja određuje veličinu prigušenja u sistemu, odnosno u apsorberu, nije ušla u dosadašnja razmatranja, pošto položaj tačaka S i T nije zavisio od σ .

Međutim, kao što se to vidi sa sl. 53, maksimalne ordinatne rezonantnih krivih koje prolaze kroz tačke S i T zavise od veličine σ . Najpovoljniji uslov ćemo dobiti ako σ izaberemo tako da rezonantne krive imaju horizontalne tangente ili u tački S , ili u tački T .

Dve krive ove vrste prikazane su na sl. 54, pri čemu jedna



Sl. 54

od njih ima maksimum u tački S , dok druga ima maksimum u tački T . Ove krive su sračunate za slučaj kada je odnos masa:

$$\mu = \frac{1}{4}.$$

Sa dijagrama prikazanog na sl. 54 se vidi da se maksimalne ordinate ovih krivih razlikuju vrlo malo od ordinata tačaka S i T , tako da se može tvrditi da jednačina (d') određuje amplitudu prinudnih oscilacija mase m , sa vrlo dobrom tačnošću, razumljivo ukoliko je bezdimenzijski koeficijent prigušenja σ izabran na izloženi način.

Najzad, potrebno je da se na kraju još pokaže kako se mora izabrati bezdimenzijski koeficijent prigušenja σ da bismo ostvarili da rezonantne krive imaju maksimum ili u tački S , ili pak u tački T .

Ako podjemo od izraza (r)

$$\eta^2 = \left(\frac{f_1}{f_{st}} \right)^2 = \frac{M\sigma^2 + N}{P\sigma^2 + Q},$$

gde su, kao što znamo, M , N , P i Q funkcije od Λ , μ i ν , ako prethodni izraz rešimo po σ^2 , kao nepoznatoj, dobićemo

$$\sigma^2 = \frac{N - Q\eta^2}{P\eta^2 - M}.$$

(e')

Kada je masa apsorbera m_2 izabrana, tada je poznat odnos μ , pa se iz jednačine (a') može odrediti veličina za ν . Isto tako, veličine Λ_1^2 i Λ_2^2 , koje odgovaraju tačkama S i T , mogu da se dobiju iz jednačine (c'), a dinamički faktor pojačavanja iz jednačine (d'). Kada sve ove veličine smenimo u izraz (e') dobićemo neodređeni izraz σ^2 za σ^2 , pošto položaj tačaka S i T ne zavisi od σ . Uočimo zato na rezonantnoj krivi tačku koja je vrlo bliska tački S . Ako imamo maksimum u tački S , vrednost dinamičkog faktora pojačavanja η neće se znatno promeniti pri malom pomeranju tačke S . Koeficijenti μ i ν ostaće isti kao i pre, a samo umesto Λ_1^2 treba uzeti nešto malo promenjenu vrednost. Sa ovom promenom dobiće se da izraz (e') ima određenu vrednost. Ta vrednost biće u isto vreme i tražena vrednost

za δ^2 , pri kojoj je tangenta na rezonantnu krivu u tački S horizontalna. Na potpuno isti način možemo odrediti vrednost i za δ^2 pri kojoj će tangenta i u tački T biti horizontalna.

Najzad da rezimiramo na kraju izloženi postupak za konstrukciju dinamičkog apsorbera sa prigušivanjem.

Sukcesivni postupci pri ovoj konstrukciji sastoje se u sledećem:

a) za datu osnovnu masu sistema m_1 (masu mašine) i njenu frekvenciju slobodnih oscilacija ω_0 , treba najpre odabrati masu apsorbera m_2 ; time je određen odnos μ ;

b) kada se to učini krutost opruge apsorbera, odnosno odnos γ , može da se odredi korišćenjem jednačine (a');;

c) veličina bezdimenzijskog koeficijenta prigušenja σ može onda da se odredi korišćenjem jednačine (e'), a

d) amplituda prinudnih oscilacija korišćenjem jednačine (d').

Da bi se uprostiti ovi proračuni mogu se upotrebiti krive prikazane na dijagramu na sl. 55, gde su na apscisnoj osi naneti odnosi masa

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{\mu}.$$

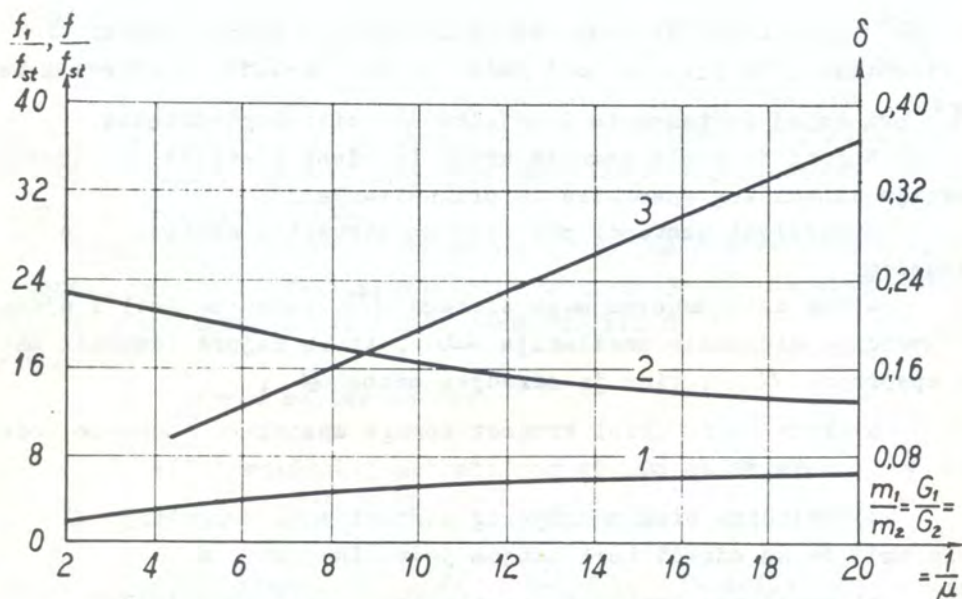
Ordinata krive 1 određuje veličinu dinamičkog faktora pojačavanja η , preko koga se može odrediti amplituda prinudnih oscilacija osnovne mase sistema m_1 , dok kriva 2 određuje potrebnu veličinu prigušivanja u sistemu.

Kada se izvrši sve što je pobrojano pod a), b), c) i d), ostaje još na kraju da se odredi, odnosno da se izabere, opruga apsorbera.

Krutost ove opruge je određena jednačinom (a'). Maksimalni napon u opruzi, izazvan oscilacijama, može da se odredi ako je poznato maksimalno relativno pomeranje apsorbera:

$$f = (x_2 - x_1)_{max}$$

(f')



Sl.55

Tačan proračun ove veličine zahteva komplikovana ispitivanja kretanja mase apsorbera m_2 . Dosta zadovoljavajuća aproksimacija može da se dobije ako se pretpostavi da oscilacije sistema zaostaju u fazi za $\pi/2$ iza poremećajne sile $F_a = F_0 \cos \Omega t$, koja deluje na osnovnu masu sistema m_1 . U ovom slučaju rad izvršen za vreme jednog ciklusa biće jednak $\pi F_0 f_1$, dok će rasipanje energije za vreme jednog ciklusa, usled prigušivanja u sistemu, biti proporcionalno relativnoj brzini $\pi b \Omega f^2$.

Ako energiju koja se rasipa za vreme jednog ciklusa, izjednačimo sa radom koji se proizvodi za vreme jednog ciklusa, dobićemo da je:

$$\pi F_0 f_1 = \pi b \Omega f^2, \quad (g')$$

odnosno

$$f^2 = \frac{F_0 f_1}{b \Omega}, \quad (h')$$

ili uvodeći ranije oznake

$$\sigma = \frac{b}{2m_2\omega_0}, \quad \frac{F_0}{c_1} = f_{st}, \quad \frac{m_2}{m_1} = \mu,$$

definitivno dobijamo:

$$\left[\left(\frac{f}{f_{st}} \right)^2 = \frac{f_1}{f_{st}} = \frac{1}{2\sigma\mu\lambda} \right]$$

(j')

Pošto su veličine σ i μ obično vrlo male, relativna pomeranja f , koja se dobijaju iz ove jednačine, biće nekoliko puta veća od pomeranja f_1 osnovne mase sistema m_1 . Na sl.55 krivom 3 prikazane su vrednosti odnosa f/f_{st} . Velika pomeranja izazivaju takodje i velike napone u opruzi apsorbera, pa, pošto ovi naponi menjaju znak za vreme oscilovanja, problem dovoljne sigurnosti, zbog zamora materijala, biće od velikog praktičnog značaja.

Čitav ovaj postupak koji smo izneli za prinudne oscilacije lančanih sistema sa dva stepena slobode, zbog potpune analogije, može da se primeni i na torzione sisteme sa dva stepena slobode.

Motori sa unutrašnjim sagorevanjem predstavljaju najvažnije polje primene dinamičkih apsorbera sa prigušivanjem.